ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 1η ΔΕΚΑΔΑ

1.

α) Ποια παράσταση ονομάζουμε αριθμητική και ποια αλγεβρική;

β) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

i. $Α = 3(5x + 1) – 4(5 – x) + 6x –2$ όταν $x = –1$

ii. $Β = 2(x –3y) + x – 4y + 8 – 4(–2x + 3y)$ όταν $x = 0,1$ και $y = –1,5$

iii. $Γ = 5x – 4+ 2(– x + y) + y$ όταν $x + y = 4$

Προτεινόμενη λύση

α)

Αριθμητική ονομάζεται η παράσταση η οποία περιέχει αριθμούς που συνδέονται μεταξύ τους με τα γνωστά σύμβολα των πράξεων , ενώ αλγεβρική ονομάζεται η παράσταση που περιέχει γράμματα και αριθμούς που συνδέονται με τα γνωστά σύμβολα των πράξεων.

β)

i. $Α = 3(5x + 1) – 4(5 – x) + 6x –2 = 15x + 3 – 20 + 4 x + 6x –2 = 25x–19$

Για $x = –1$ είναι $Α = 25(–1) –19 = –25 –19 = – 44$

ii. $Β = 2(x –3y) + x – 4y + 8 – 4(–2x + 3y) = 2x – 6y + x – 4y + 8 + 8x –12y =$

$= 11x –22y + 8$

Για $x = 0,1$ και $y = –1,5$ είναι $Β = 11·0,1 –22(–1,5) + 8 =$

$= 1,1 + 33 + 8 =$

$= 42,1$

iii. $Γ = 5x – 4+ 2(– x + y) + y = 5x – 4 – 2x + 2y + y =$

$= 3x + 3y – 4 = 3(x + y) – 4$

Για $x + y = 4$ είναι $Γ = 3·4– 4 = 12– 4 = 8$

2.

Να γίνουν οι πράξεις **α)** $(–1)^1 – (–1)^2 + (–1)^3 – (–1)^4$

β) $2^{–2} + 4^{–1} + 3^0 –(–1)^{–3}$

γ) $3^{–20} ·2^{19}·3^{21}· 2^{–20}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$(–1)^1 – (–1)^2 + (–1)^3 – (–1)^4 = (–1) – (+ 1) + (–1) – (+ 1) = – 1 – 1 –1 – 1 = – 4$

β)

$$2^{–2} + 4^{–1} + 3^0 –(–1)^{–3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^1} + 1 – \frac{1}{(–1)^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 – \frac{1}{–1} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 =$$

$$= \frac{2}{4} + 2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

γ)

$$3^{–20} ·2^{19}·3^{21}· 2^{–20} = 3^{–20 + 21} · 2^{19–20} = 3· 2^{–1} = 3·\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3.

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι δύο αριθμοί με άθροισμα 28 και τέτοιοι ώστε ένας εξ' αυτών να είναι ίσος με τα $\frac{3}{4}$ του άλλου.

α) Να δείξτε ότι τα μήκη των καθέτων πλευρών είναι 16 και 12.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας του παραπάνω τριγώνου

Προτεινόμενη λύση

α)

Έστω ότι $AB = \frac{3}{4}A\Gamma$. Αφού $AB + A\Gamma = 28$ θα έχουμε

$$\frac{3}{4}A\Gamma + A\Gamma = 28$$
$$3A\Gamma + 4A\Gamma = 4 \cdot 28$$
$$7A\Gamma = 112 \quad \text{οπότε} \quad A\Gamma = 16$$

και συνεπώς $AB = \frac{3}{4}A\Gamma = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12$

β)

Για το εμβαδόν του τριγώνου έχουμε $E = \frac{1}{2}\cdot 16 \cdot 12 = 96$ τετραγωνικές μονάδες

γ)

Για την υποτείνουσα ΒΓ έχουμε $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 =$
$= 12^2 + 16^2 =$
$= 144 + 256 = 400$ οπότε $B\Gamma = \sqrt{400} = 20$

4.

Το μήκος ενός τόξου 60^o ενός κύκλου είναι $\ell = 12{,}56$ cm

α) Να δείξτε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου στον οποίο ανήκει το τόξο είναι ρ = 12 cm
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του παραπάνω κύκλου του οποίου η γωνία είναι 30^o.

Προτεινόμενη λύση

α)

Ο τύπος $\ell = 2\pi\rho\cdot\frac{\mu}{360}$ του μήκους του τόξου δίνει $12{,}56 = 2\cdot 3{,}14\cdot\rho\cdot\frac{60}{360}$

απ' όπου ρ = 12 cm

β)

$E = \pi\rho^2 = 3{,}14\cdot 12^2 = 3{,}14\cdot 144 = 452{,}16 \text{ cm}^2$

γ)

$E_{\kappa.\tau} = \frac{\pi\rho^2\mu}{360} = \frac{3{,}14\cdot 12^2\cdot 30}{360} = 37{,}68 \text{ cm}^2$

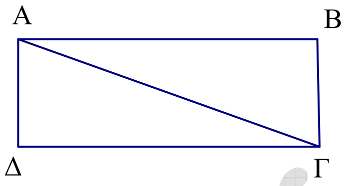
5 .

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μία διάσταση είναι τριπλάσια από την άλλη και η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 120 cm

α) Να δείξτε ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου έχουν μήκη 15 cm και 45cm

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά είναι ίση με την διαγώνιο του παραπάνω ορθογωνίου.



Προτεινόμενη λύση

α)

Έστω το διπλανό ορθογώνιο με ΑΒ = 3ΑΔ

Η περίμετρος Π είναι ίση με Π = 2ΑΒ + 2 ΑΔ

και λόγω της υπόθεσης 120 = 6ΑΔ + 2ΑΔ

120 = 8ΑΔ άρα ΑΔ =15 cm και ΑΒ = 3·15 = 45 cm

β)

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι Ε =15·45 = 675 cm^2

γ)

Από το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 =$

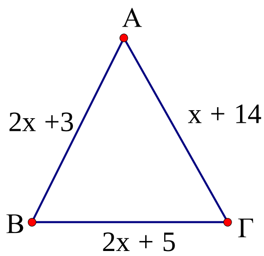
$= 45^2 + 15^2 =$

$= 2025 + 225 = 2250$

Οπότε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την ΑΓ είναι $Ε_τ = ΑΓ^2 = 2250cm^2$

6.

Δίνεται το διπλανό τρίγωνο.



α) Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 27 cm, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

β) Αν είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του και το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ΒΓ.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί το τρίγωνο να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

Προτεινόμενη λύση

α)

Περίμετρος = ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ άρα $27 = 2x + 3 + x + 14 + 2x + 5$

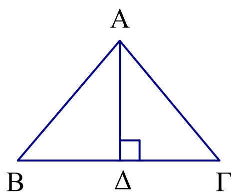
$27 = 5x + 22$

$5x = 5$

$x = 1$

Τότε ΑΒ = 5 , ΑΓ = 15 και ΒΓ = 7

β)



Θα πρέπει ΑΒ = ΑΓ άρα $2x + 3 = x + 14$ οπότε $x = 11$

Τότε ΑΒ = 25 , ΑΓ = 25 και ΒΓ = 27

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ύψος ΑΔ στην ΒΓ.

Το ύψος ως γνωστόν είναι και διάμεσος .

Από το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 – ΑΔ^2 =$

$= 25^2 – 13{,}5^2 =$

$= 625 – 182{,}25 =$

$= 442{,}75$

τότε $ΑΔ = \sqrt{442{,}75} \approx 21{,}04$

γ)
Θα πρέπει ΑΒ = ΒΓ άρα $2x + 3 = 2x + 5$ οπότε $0x = 2$ εξίσωση αδύνατη.
Άρα δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

7.

Έστω οι εξισώσεις $\frac{x+1}{4} + \frac{3x+1}{2} = \frac{23x+24}{20} - \frac{1-2x}{5}$ **(1)**

και $2(3x + 1) - (3\mu + 4)(x + 1) = 2x + 8$ **(2)**

α) Να βρείτε την λύση της (1)
β) Αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν την ίδια λύση, να υπολογίσετε την τιμή του μ

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{x+1}{4} + \frac{3x+1}{2} = \frac{23x+24}{20} - \frac{1-2x}{5}$$

$$20\cdot\frac{x+1}{4} + 20\cdot\frac{3x+1}{2} = 20\cdot\frac{23x+24}{20} - 20\cdot\frac{1-2x}{5}$$

$$5(x + 1) + 10(3x + 1) = 23x + 24 - 4(1-2x)$$

$$5x + 5 + 30x + 10 = 23x + 24 - 4 + 8x$$

$$4x = 5 \text{ οπότε } x = \frac{5}{4}$$

β)

Η (2) για $x = \frac{5}{4}$ γίνεται $2\left(3\cdot\frac{5}{4} + 1\right) - (3\mu + 4)\left(\frac{5}{4} + 1\right) = 2\cdot\frac{5}{4} + 8$

$$\frac{19}{2} - (3\mu + 4)\frac{9}{4} = \frac{5}{2} + 8$$

$$4\cdot\frac{19}{2} - 4\cdot(3\mu + 4)\frac{9}{4} = 4\cdot\frac{5}{2} + 4\cdot 8$$

$$38 - 9\cdot(3\mu + 4) = 10 + 32$$

$$38 - 27\mu - 36 = 10 + 32 \quad \text{απ' όπου } \mu = -\frac{40}{27}$$

8.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{25} + \sqrt{(-4)^2} - 5\sqrt{\frac{4}{25}} + (\sqrt{2})^2$

β) Να αποδείξτε ότι **i)** $\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{25}}}} = 3$

ii) $\sqrt{9\sqrt{64\sqrt{8\sqrt{4}}}} = 12$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\sqrt{25} + \sqrt{(-4)^2} - 5\sqrt{\frac{4}{25}} + (\sqrt{2})^2 = 5 + |-4| - 5\cdot\frac{2}{5} + 2 = 5 + 4 - 2 + 2 = 9$$

β)

i) $\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{25}}}} = \sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+5}}} =$

$= \sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{9}}} =$

$= \sqrt{7+\sqrt{1+3}} =$

$= \sqrt{7+\sqrt{4}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$

ii) $\sqrt{9\sqrt{64\sqrt{8\sqrt{4}}}} = \sqrt{9\sqrt{64\sqrt{8\cdot 2}}} =$

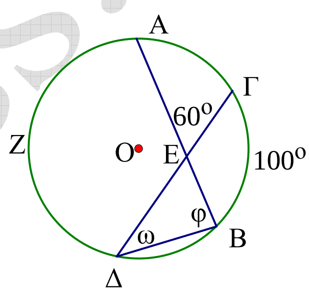
$= \sqrt{9\sqrt{64\sqrt{16}}} =$

$= \sqrt{9\sqrt{64\cdot 4}} =$

$= \sqrt{9\sqrt{256}} = \sqrt{9\cdot 16} = \sqrt{144} = 12$

9.

Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 10cm.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα με τόξο το $\overset{\frown}{ΑΖΔ}$

δ) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$

Προτεινόμενη λύση

α)

Η $\hat{\omega}$ ως εγγεγραμμένη στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ που είναι 100^o θα έχει μέτρο 50^o.

$Δ\hat{Ε}Β = 60^o$ ως κατακορυφήν της $Α\hat{Ε}Γ$, οπότε στο τρίγωνο ΔΕΒ είναι

$\hat{\omega} + \hat{\varphi} + Δ\hat{Ε}Β = 180^o$ άρα $\hat{\varphi} = 180^o – 50^o – 60^o = 70^o$

β)

$Ε_{κύκλου} = \pi\rho^2 = 3{,}14\cdot 10^2 = 3{,}14\cdot 100 = 314\ cm^2$

γ)

Αφού $\hat{\varphi} = 70^o$ το αντίστοιχο τόξο θα είναι 140^o.

Επομένως $Ε_{κ.τ} = \dfrac{\pi\rho^2\mu}{360} = \dfrac{3{,}14\cdot 10^2\cdot 140}{360} \approx 122{,}1 cm^2$

δ)

$\ell_{\overset{\frown}{ΒΓ}} = 2\pi\rho\dfrac{\mu}{360} = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot\dfrac{100}{360} \approx 17{,}4$ cm

10.

Να αποδείξετε ότι **α)** $\eta\mu^2 30^o + \eta\mu^2 60^o + \varepsilon\varphi^2 45^o = 4\sigma\upsilon\nu 60^o$

β) $2\varepsilon\varphi^2 60^o - 4\sigma\upsilon\nu^2 30^o + 3\varepsilon\varphi^2 30^o = 8\sigma\upsilon\nu^2 45^o$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\eta\mu^2 30^o + \eta\mu^2 60^o + \varepsilon\varphi^2 45^o = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \textbf{(1)}$$

$$4\sigma\upsilon\nu 60^o = 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \quad \textbf{(2)}$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\eta\mu^2 30^o + \eta\mu^2 60^o + \varepsilon\varphi^2 45^o = 4\sigma\upsilon\nu 60^o$

β)

$$2\varepsilon\varphi^2 60^o - 4\sigma\upsilon\nu^2 30^o + 3\varepsilon\varphi^2 30^o = 2(\sqrt{3})^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$= 2\cdot 3 - 4\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{3}{9} = 6 - 3 + 1 = 4 \quad \textbf{(3)}$$

$$8\sigma\upsilon\nu^2 45^o = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\cdot\frac{2}{4} = 4 \quad \textbf{(4)}$$

Από (3) , (4) έχουμε ότι $2\varepsilon\varphi^2 60^o - 4\sigma\upsilon\nu^2 30^o + 3\varepsilon\varphi^2 30^o = 8\sigma\upsilon\nu^2 45^o$